Revista Electrónica
Humanidades, Tecnología y Ciencia, del Instituto Politécnico Nacional

ISSN 2007-1957

DIAGONALIZACIÓN DE UNA MATRIZ CUADRADA DE 2X2, USANDO UNA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA CON SOLUCIÓN ENTERA

María Elena Maruri Peña
IPN-UPIICSA
jbasicas@hotmail.com

José Alvarado Galván
IPN-UPIICSA
Albarado1264@prodigy.net.mx

Resumen

El álgebra lineal aporta, al perfil de la ingeniería, la capacidad para desarrollar un pensamiento lógico, heurístico y algorítmico al modelar fenómenos de naturaleza lineal y resolver problemas. Uno de los temas importantes de esta unidad de aprendizaje consiste en la diagonalización de una matriz elemental cuadrada de 2x2 utilizando los procedimientos establecidos, sin embargo esto se complica cuando resultan fracciones, lo cual es poco didáctico, demostrando la experiencia que al manejar números enteros se potencializa la capacidad de aprendizaje, por ello se diseñó una matriz general, cuya función característica evite los números fraccionarios.

Palabras clave: *Diagonalización, Valores propios, Vectores propios, Matriz Inversa, Función característica.*

Muchos fenómenos de la naturaleza, que se presentan en la ingeniería, se pueden aproximar a través de un modelo lineal. Esta materia nos sirve para caracterizar estos fenómenos y convertirlos en un modelo lineal ya que es más sencillo de manejar, graficar y resolver que uno no lineal, de allí la importancia de estudiar álgebra lineal.

El tema de la diagonalización de una matriz contempla el conocimiento de los valores y vectores propios que conduce a una relación entre matrices cuadradas, originada por la transformación lineal $D = P^{-1}AP$, donde P es una matriz de transición. Finalmente se puede señalar que una clase particular de matrices son aquellas que son semejantes a una matriz diagonal. Los valores y vectores propios son una herramienta necesaria para la diagonalización de matrices, se utilizan en algunos espacios de la genética como propagación de rasgos hereditarios,

ISSN 2007-1957

crecimiento de una población, así como en las áreas de la física, mecánica, eléctrica, aerodinámica, etc.
Lo importante del presente trabajo tiene una intención didáctica ya que contempla el diseño de una matriz general cuya función característica genera números enteros que permite al alumno un mayor entendimiento del tema, con un criterio de innovación en congruencia con el nuevo modelo educativo.

Metodología

Conforme al propósito de este trabajo, para que una matriz se pueda diagonalizar es necesario que esté asociada con una función característica, que genere números enteros y ello es posible mediante el modelo ya conocido de la forma:

$$\boldsymbol{X^2 - BX - BN - N^2 = 0}$$

Entonces una solución particular sería de la forma:

$$\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} B-N & 2N \\ B & N \end{bmatrix}}$$

Ya que:

$$\boldsymbol{\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B-N & 2N \\ B & N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X+N-B & -2N \\ -B & X-N \end{bmatrix}}$$

Por lo tanto el determinante de la matriz solución es:

$$\boldsymbol{\begin{vmatrix} X+N-B & -2N \\ -B & X-N \end{vmatrix} = X^2 - BX - BN - N^2}$$

Con esto garantizamos que los valores propios de la matriz referida siempre se generen con números enteros distintos.

El procedimiento para diagonalizar una matriz cuadrada es:

a) Encontrar los valores propios, resolviendo la ecuación característica
b) Encontrar los vectores propios correspondiente a cada valor propio
c) Construir la matriz P de transición de vectores propios
d) Mostrar que P es invertible
e) Encontrar la matriz D, utilizándola relación: $D = P^{-1}AP$

Aplicación:

Encuentre una matriz **P** que diagonalice la matriz **A** y verifique que en efecto $D = P^{-1}AP$ es una matriz diagonal si:

$$\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} B-N & 2N \\ B & N \end{bmatrix}}$$

Considere:

$$\boldsymbol{B = 2 \quad N = 1}$$

Entonces la matriz quedaría como:

$$\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} B-N & 2N \\ B & N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-1 & 2(1) \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$\boldsymbol{\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X-1 & -2 \\ -2 & X-1 \end{bmatrix}}$$

$$\boldsymbol{\begin{vmatrix} X-1 & -2 \\ -2 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)^2 - 4 = X^2 - 2X + 1 - 4}$$

$$\boldsymbol{\begin{vmatrix} X-1 & -2 \\ -2 & X-1 \end{vmatrix} = X^2 - 2X - 3}$$

Para determinar los valores propios igualamos a cero el determinante:

$$\boldsymbol{X^2 - 2X - 3 = 0}$$

ISSN 2007-1957

Resolvemos la ecuación cuadrática:

$$x=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4C}}{2}$$

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2¡^2-4(-3)}}{2}$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}$$

$$x=\frac{2\pm 4}{2}=1\pm 2$$

$$x_1=3$$

$$x_2=-1$$

Considerando el valor propio de

$$x_1=3$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{X-1} & \mathbf{-2}\\ \mathbf{-2} & \boldsymbol{X-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{3-1} & \mathbf{-2}\\ \mathbf{-2} & \mathbf{3-1}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{0}\\ \mathbf{-2} & \mathbf{2} & \mathbf{0}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}$$

$$x_2=\mathrm{a}$$

$$x_1=\mathrm{a}$$

Entonces

$$x=(a,a)=a(1,1)$$

El vector propio es:

$$P_2=\begin{bmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{1}\end{bmatrix}$$

Considerando el valor propio de

$$x_1=-1$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{X-1} & \mathbf{-2}\\ \mathbf{-2} & \boldsymbol{X-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{-2} & \mathbf{-2}\\ \mathbf{-2} & \mathbf{-2}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}$$

$$x_2=\mathrm{a}$$

$$x_1=-\mathrm{a}$$

Entonces

$$x=(-a,a)=a(-1,1)$$

El vector propio es:

$$P_2=\begin{bmatrix}\mathbf{-1}\\ \mathbf{1}\end{bmatrix}$$

Por lo tanto la matriz de transición es

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{1}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{1}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{1}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{1}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\end{bmatrix}$$

La inversa de la matriz de transición es:

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\\ -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\end{bmatrix}$$

ISSN 2007-1957

$$AP = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AP = \begin{bmatrix} 1(1) + 2(1) & 1(-1) + 2(1) \\ 2(1) + 1(1) & 2(-1) + 1(1) \end{bmatrix}$$

$$AP = \begin{bmatrix} 1(1) + 2(1) & 1(-1) + 2(1) \\ 2(1) + 1(1) & 2(-1) + 1(1) \end{bmatrix}$$

$$AP = \begin{bmatrix} 1 + 2 & -1 + 2 \\ 2 + 1 & -2 + 1 \end{bmatrix}$$

$$AP = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Comprobación

$$D = P^{-1}AP$$

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} + \frac{3}{2} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{6}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto la matriz A es diagonalizable.

Conclusiones

El modelo de matriz:

$$A = \begin{bmatrix} B - N & 2N \\ B & N \end{bmatrix}$$

únicamente maneja valores propios enteros y reales distintos en la función característica, esto garantiza que dicha matriz sea diagonalizable con solución también entera, ello hace posible que el alumno potencialice su capacidad de aprendizaje. Igualmente dicho modelo representa una plataforma didáctica bajo un enfoque constructivo del conocimiento y aprendizaje significativo.
Esta modelo permite el diseño de diversos ejercicios clave con el fin de crear un banco de reactivos para los exámenes de la unidad de aprendizaje del Algebra Lineal.

Referencias

Grossman, S. (1996). Álgebra Lineal México: McGraw-Hill.

Anton H. (2005). Introducción al Álgebra Lineal . México: editorial LIMUSA

Johnsonbaugh, R. (2005). Matemáticas discretas México: Pearson educación.

Alvarado J. (2016). Tópicos de matemáticas para ingeniería y ciencias. México: Publicación.

Cueto J. (2005). Curso de Algebra Lineal. Recuperado el 19 de agosto de 2005, de http://www.aulavirtual.ittapachula.edu.mx/course/info.php?id=31