



UN ACERCAMIENTO A LA MODELACIÓN MATEMÁTICA MEDIANTE EL TRABAJO POR PROYECTOS

Martha Patricia Jiménez Villanueva

Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Cómputo
mjimenezv@ipn.mx

Laura Muñoz Salazar

Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Cómputo
lmunozs@ipn.mx

Gelacio Castillo Cabrera

Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Cómputo
gcastilloc@ipn.mx

Resumen

En este trabajo se presenta un estudio de caso donde se analizan las acciones de un grupo de estudiantes de segundo semestre, de Ingeniería en Sistemas Computacionales de la Escuela Superior de Cómputo del Instituto Politécnico Nacional, cuando resuelven problemas de optimización mediante el trabajo por proyectos. El estudio se abordó desde un enfoque cualitativo. Los resultados muestran que la modelización a través del trabajo por proyectos proporciona a los estudiantes elementos de juicio para opinar críticamente, fortalece el trabajo en equipo y la discusión, además proporciona a los estudiantes una visión integrada de las matemáticas.

Palabras clave: modelación matemática, trabajo por proyectos, optimización

Diferentes autores señalan que una de las dificultades de la enseñanza de las matemáticas es la forma en cómo se articula el contenido en el aula, el cual se orienta preferentemente hacia el ámbito puramente matemático, basado en la ejercitación y en el manejo de algoritmos sin una vinculación con problemas del mundo real y de las ciencias (Arevana y Giménez, 2002; Barallobres, 2022). Esto conlleva al desinterés de los estudiantes en el estudio de las matemáticas ya que no conciben su utilidad en el proceso de su formación (Arevana et al., 2008; Salett y Hein

2004). Una ruta para articular los contenidos es la modelización matemática, que implica la búsqueda de un modelo matemático que permita analizar el fenómeno y explicarlo a través de dicho modelo, esto demanda de los estudiantes diferentes tipos de habilidades y conocimientos para llegar a la modelización desde el punto de vista de las matemáticas (Hitt y Cortés, 2009).

La formación matemática actual requiere que el alumno adquiera competencias y capacidades para desenvolverse satisfactoriamente, el trabajo por proyectos y



el modelado matemático incorpora experiencias que propician la adquisición de estas competencias y capacidades, además atiende a las propuestas internacionales para romper con el paradigma de la enseñanza tradicional, por otra parte, pone a disposición de los estudiantes un conjunto de recursos que les permite entender de forma más amplia la aplicabilidad de los conceptos y procesos (García, et al., 2019).

Diferentes investigaciones muestran la importancia de incorporar el método de proyectos en el aula, tanto para superar obstáculos como para desarrollar habilidades matemáticas (Arevana, et al., 2008). Coincidimos con Arevana y colaboradores que, en el proceso de integración y construcción, la apropiación de conceptos y objetos matemáticos por parte de los estudiantes necesita ser contextualizada en un ambiente de resolución de problemas a través de la regulación continua del aprendizaje.

Nuestro interés se centra en que el estudiante, por un lado, determine el modelo matemático de situaciones matemáticas, y por otro, dé sentido a las respuestas obtenidas mediante el uso de los criterios de la primera y la segunda derivada a través de la validación de conjeturas, previamente establecidas mediante el uso de relaciones algebraicas, geométricas y analíticas para la toma de decisiones sobre el valor óptimo

Método e instrumentos

El trabajo por proyectos inicia con la selección de un problema de optimización, susceptible de ser simulado con alguna herramienta computacional que los alumnos utilicen. La tarea fue determinar el valor óptimo del problema planteado usando los criterios de la primera y la segunda derivada, apoyados en las conjeturas realizadas por los

alumnos con la simulación de la situación planteada.

El proyecto se desarrolló durante tres meses, y se dividió en tres etapas.

Etapas inicial. El profesor presenta el trabajo, se forman equipos de tres o cuatro estudiantes y se realiza la búsqueda de un problema de interés para los integrantes del equipo.

Etapas de ejecución. Se divide en cuatro fases

1. Se identifican las variables y las constantes involucradas, se diseña una representación esquemática del problema, se trabaja con valores específicos de las variables involucradas, construcción de gráfica de los datos, preparación del primer informe.
2. Búsqueda y formulación del modelo matemático, preparación del segundo informe.
3. Selección de la herramienta computacional para simular la situación planteada, diseño y desarrollo de la simulación y por último conjeturar sobre el valor óptimo del problema. Preparación del tercer informe.
4. Determinación del valor óptimo usando los criterios de la primera y la segunda derivada, comparar el valor obtenido con el valor estimado, detectar errores y validar conjeturas. Preparación del informe final.

Los avances se realizan para dar seguimiento al desarrollo del proyecto, se presentaron cuatro estados de avance donde se realizaron entrevistas planificadas con el objetivo de detectar cambios y evoluciones, dificultades y progresos (Aravena, et al. 2008).

Etapas final. Presentación oral. Los estudiantes exponen los puntos desarrollados en el informe: justificación del problema seleccionado y descripción de los objetivos, metodología utilizada, resultados y conclusiones. Esta etapa es muy importante



porque expresar procesos matemáticos en forma oral no es una tarea fácil, ya que requiere el desarrollo de habilidades y competencias para comunicar oralmente lo que los estudiantes saben; explicación de un proceso, justificaciones de cálculos, síntesis de sus conocimientos o propuestas de procedimientos.

Sujetos de estudio

El trabajo por proyecto se desarrolló en dos grupos de la unidad de aprendizaje de Cálculo Aplicado que se imparte en el segundo semestre de la Ingeniería en Sistemas Computacionales de la Escuela Superior de Cómputo del Instituto Politécnico Nacional, los 60 alumnos participantes se distribuyeron en equipos de trabajo de tres o cuatro integrantes. En el presente documento se analizan las acciones realizadas por uno de los equipos de trabajo.

Instrumentos utilizados

Se realizaron cuatro entrevistas con el propósito de verificar los cambios, evoluciones y capacidades de los estudiantes. Se utilizó una rúbrica y una lista de cotejo para valorar el informe y la presentación oral del trabajo. En la tabla 1 se presentan los elementos de análisis.

Tabla 1: Categorías de análisis.

Instrumento de análisis		
Categorías	Subcategorías	Elementos
Aspectos cognitivos	Conceptuales	Reconocimiento e interpretación de conceptos Propiedades y características de los objetos matemáticos asociados
	Procedimentales	Organización e interpretación de la información Cálculos realizados Determinación de parámetros Construcción del modelo matemático
Aspectos metacognitivos	Creatividad	El aporte de ideas en la resolución de problemas, así como para la simulación de la situación planteada
	Pensamiento estratégico	Búsqueda de rutas de solución Forma de enfrentar el problema desde diversas perspectivas Espíritu crítico
Aspectos de formación transversal	Actitud matemática	Reconocimiento a la utilidad de las nociones y los procesos para resolver problemas, así como la manera en que los alumnos valoran el uso que les dan a los conceptos.
	Autonomía	Responsabilidad en las tareas asignadas. Respetar ideas Seguir instrucciones y la toma de decisiones

Fuente elaboración propia con base en Aravena, et al. (2008)

Resultados

Primer avance

La primera entrevista se abordó como una conversación abierta, la cual implica un proceso de comunicación en la que el entrevistado y entrevistador pueden influirse mutuamente (Vargas, 2009).

La entrevista se enfoca en dos aspectos: Justificación de la elección del problema que van a trabajar y las acciones realizadas para enfrentar el problema. [Transcripción de entrevistas.docx](#)

De la entrevista se puede extraer que los alumnos tienen un conocimiento general de lo que quieren realizar, tienen claro cuál es el producto final que quieren lograr y reconocen que la representación gráfica les ayuda a ver el comportamiento de la situación planteada, identifican las variables involucradas en el problema, puntos de corte con el eje X y área total encerrada.

Los alumnos visualizan conceptos matemáticos importantes como, crecimiento, decrecimiento, y tienen idea sobre el mínimo de una función. En la tabla 2 se presentan los resultados de la primera fase de la implementación.

Tabla 2. Aspectos identificados en la primera entrevista y reporte del primer informe



Primer informe	
<i>Elementos cognitivos</i>	Elementos cognitivos puestos en juego: crecimiento de una función, decrecimiento de una función, variable, predicción, máximo de una función, ajuste, función cuadrática y modelo matemático.
<i>Elementos metacognitivos</i>	En referencia a los elementos procedimentales los alumnos organizan los datos y los representan gráficamente, analizan el comportamiento de la gráfica, necesidad de establecer relaciones matemáticas para describir la situación planteada, predicción a través de los datos.
<i>Elementos transversales</i>	En esta primera fase de la etapa de desarrollo están presentes los elementos metacognitivos de creatividad y pensamiento estratégico, lo cual se nota con el aporte de nuevas ideas para resolver el problema, la estrategia de utilizar hilo para resolver el problema de forma experimental resulta relevante. Un pensamiento estratégico que resulta es que los alumnos tienen presente que para que una función tenga un mínimo, la gráfica debe cambiar de decreciente a creciente.
<i>Elementos transversales</i>	En la primera entrevista se observó que los alumnos tienen una actitud de diálogo y responsabilidad, además se interesan en buscar diferentes caminos para enfrentar el problema de forma colaborativa.

Fuente: Elaboración propia

Segundo avance

Se destacan las transformaciones de acuerdo con las sugerencias del primer avance, se exponen las relaciones entre los datos y la gráfica, así como los procesos utilizados para construir el modelo matemático que representa la situación planteada. (ver [Transcripción de entrevistas.docx](#))

De esta segunda fase se puede extraer que, los alumnos realizaron algunas transformaciones de acuerdo con las sugerencias del primer avance, los alumnos proporcionan evidencias (cronograma de actividades modificado) en relación con la organización del informe, hicieron adaptaciones, aceptaron las sugerencias realizadas al primer informe, además investigaron para complementar y fundamentar el trabajo realizado. Lo anterior muestra elementos transversales, los alumnos se acoplan a las condiciones y aceptan las transformaciones sugeridas en el primer avance.

Los alumnos ponen en evidencia que han usado diferentes representaciones gráficas y que además han transitado por ellas, de los datos a la gráfica y de la gráfica al modelo matemático y viceversa, cuando plantean que

han realizado un ajuste a una función cuadrática y regresan nuevamente a la gráfica.

Reconocen a la función cuadrática como el mejor ajuste para describir el modelo y usan diferentes procedimientos para identificar la función que modela el problema. Un concepto importante que los alumnos introducen es el de sistemas de ecuaciones.

Los alumnos se dan cuenta que la función no tiene sentido para todos los valores de x , lo cual les permite identificar las condiciones que restringen el problema a partir de los datos reales, dominio real del modelo.

Dada las características del modelo matemático que los alumnos han construido les permite hacer conjeturas en relación con el mínimo de la función.

Señalan las dificultades que tuvieron y reconocen sus limitaciones y progresos para entender el ajuste y la predicción, conceptos que han ido aclarando durante el desarrollo del trabajo. Los resultados se presentan en la tabla 3.

Tabla 3. Aspectos identificados en la segunda entrevista y segundo informe

Segundo informe	
<i>Elementos cognitivos</i>	Los alumnos reconocen el tipo de función que modela la situación, función cuadrática (parábola que abre hacia arriba), defienden sus afirmaciones apoyándose en la representación gráfica y en la representación tabular de los datos. Un elemento importante que surge del diálogo es el uso de sistemas de ecuaciones para ajustar los datos a una cuadrática, lo que es bueno porque no se aleja de los datos reales. Los conceptos que los alumnos introducen en esta segunda fase son: ajustes de datos a una cuadrática, dominio natural y dominio real de una función, sistemas de ecuaciones, idea de mínimo de una función.
<i>Elementos metacognitivos</i>	Se presentan en las ideas que introducen los alumnos para resolver el problema por diferentes caminos, los alumnos tienen conciencia de lo que tienen que modelar y tienen idea de lo que tienen que optimizar.
<i>Elementos transversales</i>	Los alumnos registran sus aciertos, específicamente en la construcción del modelo matemático, reconocen sus limitaciones, específicamente en relación con las dificultades encontradas para calcular el máximo de la función. Progresan en la responsabilidad de los compromisos adquiridos, aceptan sugerencias y se distingue una actitud positiva hacia la matemática al reconocer la interrelación de diferentes áreas (cálculo, ecuaciones diferenciales) en la solución de problemas.

Fuente: Elaboración propia.



Exposición oral

En esta etapa se pone de manifiesto que el trabajo por proyectos ayuda a los estudiantes a desarrollar una serie de capacidades que le permiten apreciar la utilidad de las matemáticas. En la tabla 4 se presentan los resultados de esta etapa.

Tabla 4. Aspectos identificados en la presentación el trabajo

	Presentación del trabajo
<i>Elementos cognitivos</i>	Dotan de significado a los conceptos y procesos matemáticos al relacionarlos con la situación planteada, lo cual les permite formular el modelo que da respuesta al problema planteado.
	Han podido conjeturar sobre el valor óptimo del problema
	Lograron identificar las variables pertinentes que necesitaban para formular el modelo y dar respuesta a su problema de estudio.
	Los alumnos utilizan diferentes representaciones y establecen comparaciones pasando de una representación a otra.
<i>Elementos metacognitivos</i>	Muestran un desarrollo organizado, planifican las tareas a realizar y formulan un problema en términos matemáticos y la solución al problema real.
	Los alumnos tienen capacidad para solucionar un problema, esto se muestra desde la elección del problema y la forma en que dirigieron sus esfuerzos para llegar a su solución.
<i>Elementos transversales</i>	La elección de la herramienta computacional que les permitió simular y conjeturar sobre la solución del problema. En relación con el análisis crítico, los alumnos seleccionaron y establecieron la relación entre las variables involucradas lo que condujo primero a la modelización del problema y posteriormente a la determinación del valor óptimo de la situación.
	Los estudiantes manifiestan sus propias ideas y argumentan sus decisiones, se abren al diálogo e incrementan su capacidad de comunicación (Aravena y Giménez, 2001). Además, asumen tareas y compromisos.

Conclusiones

El análisis de los resultados nos ha permitido constatar que un trabajo sustentado en la optimización de un problema real permite a los estudiantes participar de manera activa en la construcción de sus conocimientos, así como adquirir una visión integrada de la matemática, además de valorar la utilidad de los conceptos y procesos.

Podemos concluir que trabajar la modelización a través del trabajo por proyectos fue positivo para los estudiantes ya que les permite adquirir una visión integrada de las matemáticas, emplear sus

conocimientos previos, adquirir elementos de juicio para opinar críticamente sobre la situación que se expone además de fortalecer el trabajo en equipo y la discusión.

Referencias

Aravena, M. & Giménez, R. (2002) Evaluación de procesos de Modelización polinómica mediante proyectos, *Didáctica de las matemáticas* 31, 44-56.

Aravena, M.; Caamaño, C. y Giménez, J. (2008) Modelos Matemáticos a través de proyectos, *Revista Latinoamericana de Investigación en matemática educativa*, 11(1), 49-92.

Barallobres, G. (2022). Diferentes interpretaciones de las dificultades de aprendizaje de las matemáticas. *Educación matemática*. 28 (1). <https://doi.org/10.24844/em2801.02>

García, P., Montaña, S. y Pérez, R. (2019). Aprendizaje basado en proyectos para el desarrollo comunitario, una experiencia en la formación de ingenieros civiles. *Conrado*, 15(68), 130-134.

Hitt, F. y Cortés, J. (2009). Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelización matemática y uso de calculadora con posibilidades gráficas. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*, 10 (1). 1-30.

Salett, B. M. y Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática*, 16 (2), 105-125.

Vargas, J.I. (2010). La entrevista en la investigación cualitativa: nuevas tendencias y retos. *Revista Calidad en la Educación Superior*. 3(1). 119-139.