Humanidades, Tecnología y Ciencia, del Instituto Politécnico Nacional
Certificado de Reserva de Derechos al Uso Exclusivo del Título: 04-2010-0326124-14000-203 ISSN: 2007-1957

ISSN 2007-1957

DE LA AXIOMÁTICA AL AULA: LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA

Martha Patricia Jiménez Villanueva
Escuela Superior de Cómputo, Instituto Politécnico Nacional
mjimenezv@ipn.mx

Gelacio Castillo Cabrera
Escuela Superior de Cómputo, Instituto Politécnico Nacional
gcastilloc@ipn.mx

María del Rosario Rocha Bernabé
Escuela Superior de Cómputo Instituto Politécnico Nacional,
rosario.rocha@gmail.com

Resumen

El estudio de la demostración matemática es fundamental en carreras de ingeniería relacionadas con la programación computacional. En este sentido, se realiza investigación para identificar estrategias didácticas para su enseñanza y su aprendizaje. La revisión no es exhaustiva pero presta especial atención a las propuestas didácticas de la demostración matemática. Los resultados muestran que existe un consenso en la literatura de que la enseñanza de la demostración debe enfocarse en la explicación de los pasos más que en la simple verificación del resultado, y que para llegar a dominar la demostración es esencial desarrollar de forma integrada habilidades lógicas (razonamiento), léxicas (lenguaje y notación) y discriminativas (identificación y selección de información relevante).

Palabras clave: Demostración matemática, funciones de la demostración, didáctica de la demostración matemática

En el lenguaje cotidiano, la palabra demostración puede referirse a mostrar sentimientos, habilidades o el funcionamiento de algo. Sin embargo, en un contexto más técnico, como en la lógica o la ciencia, una demostración es un argumento formal que usa proposiciones para probar una conclusión (Alfaro-Carbajal, et al., 2019)

Godino y Recio (2001) señalan que términos como explicación, argumentación, prueba, etc., están asociados con los diversos sentidos y matices de demostración. Sin embargo, se reconoce una idea común: Justificar una afirmación significa respaldarla con razones o argumentos. Además, resaltan la necesidad de articular de algún modo los distintos significados de *prueba* de forma que

los estudiantes puedan entender la diferencia entre lo que es un buen argumento y lo que no lo es.

En los programas de estudio de las carreras de ingeniería, relacionadas con la programación, la demostración es un contenido explícito, enmarcado en la unidad de aprendizaje de matemáticas discretas, que involucra la deducción, la inducción, la generalización, la justificación, los ejemplos y contraejemplos.

La comprensión de la demostración matemática resulta relevante en estas careras porque propicia el desarrollo de habilidades que permiten verificar que un programa de computadora sea correcto, establecer si un sistema operativo es seguro o mostrar que las especificaciones de un sistema sean consistentes (Johnsonbaugh, R., 2005; Rosen, K. H., 2004).

Diferentes trabajos (Godino & Recio, 2001) reportan el bajo nivel que muestran los estudiantes en la comprensión y elaboración de demostraciones.

A partir de lo anterior, se evidencia la necesidad de conocer las propuestas didácticas de la demostración para identificar características de las secuencias se aprendizaje que contribuyan a un aprendizaje significativo de demostración.

Desarrollo

Para el análisis y registro de las fuentes de información consultadas, se empleó la revisión bibliográfica. Según Hernández-Sampieri, et al. (2014), la revisión bibliográfica es el proceso de buscar, obtener y consultar referencias y materiales para extraer información relevante sobre un problema de investigación. Este proceso es crucial porque permite: identificar y comprender los estudios, teorías y hallazgos existentes sobre el tema; construir el marco de referencia que fundamenta la investigación; detectar vacíos (lagunas) y áreas que requieren investigación más profunda; prevenir errores previamente cometidos en otros estudios; e inspirar nuevas ideas y formular preguntas de investigación adicionales.

Esta herramienta permitió sistematizar y registrar la información relevante de cada fuente, incluyendo: la naturaleza del documento (teórico o experimental), las ideas principales, los hallazgos o resultados, y las conclusiones. Este apartado se divide en tres secciones donde se describen los aportes identificados en la literatura sobre: significados de la demostración, funciones de la demostración y propuestas didácticas de la demostración.

Significados de la demostración

La noción de demostración se ha utilizado en distintos contextos. Al respecto Godino y Recio (2001) señalan que no es extraño que los alumnos confundan el uso de los diferentes tipos de argumentación, ya que interactúan en distintos ambientes donde se encuentran y emplean esquemas argumentativos variados. Estos autores caracterizan los significados de demostración en distintos contextos: *Lógica y fundamentos de la matemática*, asociada a las nociones de deducción y del sistema axiomático, descansa en la validez de las reglas de la lógica y requiere el uso de lenguajes formales; *la matemática profesional*, en este contexto la demostración es deductiva pero no formal y la fundamentación de una inferencia $A \Longrightarrow B$ se apoya en la significación particular de las expresiones A y B: *las ciencias experimentales*, se basan principalmente en prácticas argumentativas (empírico, inductivas, analogías, etc.); *la vida cotidiana*, la demostración es situacional, depende del

contexto y no necesariamente da lugar a verdades; *y la demostración en clase de matemáticas,* en este contexto se disponen de distintas pruebas para los teoremas matemáticos y las argumentaciones que establecen la verdad de los teoremas generalmente son deductivas.

Respecto al contexto de las clases de matemáticas Stylianides (2007, citado en Alfaro-Carbajal, 2019) menciona que la demostración es un tipo de argumento definido por tres elementos clave:

a) Bases de la demostración (Premisas). Las demostraciones se inician con un conjunto de afirmaciones aceptadas por el grupo de clase, conocidas como premisas. Estas pueden ser definiciones, axiomas o teoremas que sirven como punto de partida para el razonamiento.
b) Métodos de argumentación válidos. Se emplean formas de argumentación que son consideradas correctas por el aula. Esto abarca el uso de reglas de inferencia, la deducción de conclusiones generales a partir de definiciones, el análisis exhaustivo de casos o el uso de razonamientos para demostrar por contradicción.
c) Representación y comunicación adecuadas. La argumentación debe comunicarse de una manera que sea apropiada para el entorno del aula y comprensible para los estudiantes. Es importante notar que esta comunicación excluye ciertas formas como el lenguaje oral, así como diagramas, representaciones pictóricas o tablas, entre otras.

A pesar de que en la definición previa no se consideran las exploraciones empíricas, esto no invalida su importancia en el aprendizaje de las matemáticas. Según Stylianides (2007), estos argumentos son fundamentales para el proceso de investigación matemática en el aula, ya que son útiles para: identificar patrones, generar conjeturas (suposiciones) y obtener la evidencia inicial o un punto de partida para la demostración posterior.

Funciones de la demostración

Hay un conceso en la literatura de que una función sustancial de la demostración es la legitimación del saber matemático, sin embargo, no es su única función (Godino & Recio, 2001).

De Villiers (1990) identifica cinco funciones principales de la demostración matemática 1) Verificación: se asegura de que la proposición sea lógicamente correcta y no dependa de evidencia empírica incompleta. 2) Explicación: la demostración no solo prueba que una proposición es cierta, sino que también explica por qué lo es. 3) sistematización: la demostración permite organizar y estructurar los resultados matemáticos dentro de un sistema deductivo coherente. 4) Descubrimiento: la demostración es una herramienta poderosa para la exploración e invención de nuevos resultados matemáticos. 5) Comunicación: la demostración es un medio para transmitir y compartir el conocimiento matemático dentro de la comunidad científica (matemáticos, profesores, estudiantes).

De acuerdo con Silva (2002, referido en Alfaro-Carvajal, et al., 2019) la demostración cumple con tres funciones clave: la función lógico-epistemológica, que se centra en la validez lógica de la demostración; la función retórica, que se enfoca en la persuasión y depende de la aceptación del punto de partida por parte del recepto; y la función heurística, que se centra en descubrir nuevas propiedades y refinar conjeturas. En la tabla 1 se presentan coincidencias y similitudes en las posturas de los dos autores.

Tabla 1: Funciones de la demostración

De Villiers (1990)	Silva (2002)	Coincidencia/Similitud
Verificación	Función Lógico-epistemológica	Ambas se centran en la validez lógica y la corrección rigurosa.
Descubrimiento	Función Heurística	Ambas describen la demostración como un medio para generar nuevo conocimiento, propiedades y refinar conjeturas.
Explicación y Comunicación	Función Retórica	Ambas se refieren al rol de compartir la verdad o persuadir a la comunidad matemática, aunque con un enfoque diferente (comprensión vs. persuasión).

Fuente Elaboración propia con base en De Villiers (1990) y Alfaro-Carbajal, et al. (2019).

De la tabla 1 se observa que, los dos autores están de acuerdo en que la demostración es crucial para establecer la validez de una afirmación matemática, que existe una clara coincidencia en que la demostración es una herramienta activa en la exploración y la invención; y que ambos reconocen el papel de la demostración para compartir y hacer comprensible el conocimiento matemático.

Propuestas didácticas de la demostración

En la literatura se reportan las dificultades que presentan los estudiantes cuando resuelven problemas de demostración (Healy y Hoyles, 2000; Crespo et al., 2010), estas dificultades se deben, entre otras cosas, a una mezcla de significados, por parte del estudiante, de la demostración en distintos contextos (Godino y Recio, 2001); los estudiantes no entienden ni el significado ni la utilidad de la demostración (Alfaro- Carbajal et al., (2019); los estudiantes suelen validar las afirmaciones matemáticas basados en su experiencia (Bieda, et al., 2006)

Lo anterior ha motivado el desarrollo de un gran número de trabajos que plantean propuestas didácticas para superarlas.

En este sentido, existe un consenso en la literatura sobre la necesidad de superar la visión de la demostración como simple verificación. Hanna (1990) sugiere que los programas de estudio deben enfocarse en las demostraciones explicativas para revelar el porqué de un teorema. Esta idea se refuerza con la propuesta de Alfaro-Carbajal, et al. (2019), quienes plantean que la demostración escolar no debe ser un "ritual vago" (mero formalismo), sino centrarse en su rol esencial de explicar y promover la comprensión profunda, utilizando métodos variados y adaptados al nivel del estudiante.

En esta misma línea, Hernández y Jiménez (2016) proponen que en la enseñanza de las matemáticas el proceso de aprendizaje comience con la intuición, que es la capacidad creativa para descubrir ideas y conjeturas. Solo después, se introduce la demostración formal, adaptándola al nivel educativo del estudiante. Además, sostienen que la verdadera habilidad de alto nivel cognitivo no es solo demostrar, sino ser capa de refutar las propias hipótesis. Es decir, este proceso de autocrítica y corrección es lo que realmente impulsa el aprendizaje profundo.

En esta misma línea, Benites, et al. (2016) sostienen que la resolución de problemas anclados en contextos reales propicia que los estudiantes expresen sus ideas iniciales. Estas intuiciones se fortalecen y transforman generando explicaciones claras con argumentos sólidos.

Lo anterior invita a la reflexión sobre las características de las secuencias didácticas de demostración en el nivel universitario, ya que existe la posibilidad de que parte del problema en sus cursos normales, sea el uso de la

demostración formal descuidando las otras funciones de la demostración.

Conclusiones

El término "demostración" posee múltiples interpretaciones según el entorno de aplicación. En la bibliografía se reconocen pruebas que van desde la representación gráfica y la verificación por computadora hasta los procedimientos basados en la experiencia y los argumentos deductivos estrictamente formalizados.

De las características de la demostración en los diferentes contextos planteada por Godino y Recio (2001) se deduce que la naturaleza de la demostración es contextual y varía en su rigor y objetivo, el carácter de "verdad absoluta" depende del contexto y que el lenguaje, y el tipo de inferencia se adapta a la audiencia y el fin.

Aunque las exploraciones empíricas no constituyen una prueba completa, son valoradas por su utilidad en la investigación para identificar patrones y generar conjeturas, lo que subraya su papel como precursoras de la demostración formal.

La Demostración es una Herramienta Multifuncional que supera la simple verificación. La demostración matemática va mucho más allá de su función inicial de verificación (eliminar la duda y asegurar la validez lógica). Según De Villiers (1990), también cumple roles esenciales como la *explicación* (muestra el porqué es cierta), la *sistematización* (organiza teorías coherentemente), el *descubrimiento* (genera nuevos resultados o teoremas), y la c*omunicación* (transmite conocimiento para crítica pública). Esta visión integral subraya que la demostración no es solo un producto para validar, sino un proceso dinámico que impulsa la comprensión, estructura y avance de la disciplina.

Con relación a las propuestas didácticas planteas podemos concluir que el enfoque pedagógico de la demostración debe priorizar la explicación sobre la mera verificación, el aprendizaje de la demostración es un proceso gradual que inicia en la intuición y la exploración, y que el domino de la demostración requiere el desarrollo integrado de habilidades lógicas, léxicas y discriminativas.

Referencias

Alfaro-Carbajal, C., Flores-Martínez, P., & Valverde-Soto, G. (2019). La demostración matemática: significado, tipos, funciones atribuidas y relevancia en el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas. *UNICIENCIA, 33*(2), 55-75. doi:http://dx.doi.org/10.15359/ru.33-2.5

Benítez, P. A., Benítes, P. H., & Rodríguez, G. M. (2016). La argumentación sustancial. Una experiencia con estudiantes e Nivel Medio Superior en clases de matemáticas. *Educación Matemática, 28*(3), 175-216.

Bieda, K., Crristopher, H., & Knuth, E. (2006). Does proof prove?: Students' emerging beliefs generality and proof in middle school. En S. Alatorre, J. L. Cortia, M. Sáiz, & M. Aristarco, *Psychology of Mathematics Education* (págs. 393-402). Merida, Yucatán, México.

Crespo, C. C., Farfán, R. M., & Lezama, J. (2010). Argumentación y demostración: una visión de la influencia de los escenarios cocioculturales. *Revista Lationamericana de Investigación en Matemática ducativa, 13*(3), 283-306.

De Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, 17-24.

Godino, J. D., & Recio, Á. M. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las ciencias, 19*(3), 405-414.

Hanna, G. (1990). Some Pedagogical Aspects of Proof. *Interchange, 21*(1), 6-13.

Healy, H., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 13*(4), 396-428.

Hernandez, N. C., & Jiménez, K. (2016). La demostración Matemática en el aula, una estrategia para reducir el abandono escolar. *VI Claves. Sexta conferencia Latinoamericana sobre el abandono en la educación. Congresos CLABES*.

Hernández-Sampieri, R., Fernández, c., & Baptista, M. (2014). *Metodología de la investigación.* México: McGraw-Hill.

Johnsonbaugh, R. (2005). *Matemáticas Discretas.* México: Pearson/ Prentice Hall.

Rosen, K. H. (2004). *Matemáticas Discretas y sus aplicaciones.* Madrid, España: McGraw-Hill.